# Transformée de Fourier - Plancherel | Leçons : 201, 208, 234, 235, 250

<u>Convention</u> : On prend pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, dans $\hat{f}(t) = \mathcal{F}(f)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cancel{e^{-ixt}\,dx}\, e^{-2i\pi xt}\,dx$

<u>Thm</u> : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2$

<u>Preuve</u> : • On définit $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ et $g = f * \tilde{f}$ (existe car $f, \tilde{f} \in L^1$ d'où $g$ aussi)

On a $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\tilde{f}(-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(x+z)\overline{f(z)}\,dz = \langle f, f_x \rangle_{L^2}$

$g$ est continue (par $\tau^o$ de la translation et du produit scalaire

et $g$ est bornée par $\|f\|_2^2$ par Cauchy-Schwarz.

On a $g(0) = \|f\|_2^2$ et $\hat{\tilde{f}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-x)}\, e^{2i\pi xt}\,dx = \overline{\hat{f}(t)}$

D'où $\hat{g} = |\hat{f}|^2$.

• On introduit $h_\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+x^2}$ et $H(\lambda t) = e^{-\lambda|t|}$ on a $\hat{\mathcal{F}}(t \mapsto H(\lambda t))(x) = h_\lambda(x)$

$h_\lambda$ est une approximation de l'unité car $\begin{cases} - h_\lambda > 0 \\ - \int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x)\,dx = 1 \\ - \int_{|x|\geq \eta} h_\lambda \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

On a $(g * h_\lambda)(0) = \int_{\mathbb{R}} g(-t) h_\lambda(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} g(-t) \int_{\mathbb{R}} H(\lambda x)\, e^{2i\pi xt}\,dx\,dt$

$= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} g(-t)\, e^{2i\pi xt}\,dt \right) H(\lambda x)\,dx$

$= \int \hat{g}(x)\, H(\lambda x)\,dx$

On a donc $g * h_\lambda(0) \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} g(0)$

et $\hat{g}$ positive et $H(\lambda t) \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} 1$ et croissant d'où par théorème de convergence monotone

$\int \hat{g}(x) H(\lambda x)\,dx \to \|\hat{f}\|_2^2$

D'où le résultat

$\square$

Thm : $\mathcal{F} : \begin{cases} L^1 \cap L^2 \to L^2 \\ f \mapsto \mathcal{F}(f) \end{cases}$ admet un unique prolongement en une isométrie isomorphique de $L^2$ dans $L^2$

Preuve :

- On a $L^1 \cap L^2$ qui est dense dans $L^2$ et $\mathcal{F}$ est continue et $L^2$ est complet

  D'où par théorème de prolongement des applications continues, $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique sur $L^2$.

  C'est bien une isométrie d'après précédemment car $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$

- Soit $f \in L^2$ telle que $\mathcal{F}f = 0$ d'où $\|\mathcal{F}f\|_2 = 0 = \|f\|_2 \Rightarrow f = 0$ d'où $\mathcal{F}$ injective

- - Montrons que $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$ est fermé.

    Soit $(f_n)_n \in L^{2\mathbb{N}}$ telle que $(\mathcal{F}f_n)_n \in L^{2\mathbb{N}}$ converge.

    D'où $(\mathcal{F}f_n)_n$ est de Cauchy et $\|\mathcal{F}f_n\|_2 = \|f_n\|_2$ d'où $(f_n)_n$ est de Cauchy donc converge car $L^2$ est complet et donc on conclut par continuité de $\mathcal{F}$.

  - Montrons que $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

    On a $S(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R})) \subset L^2(\mathbb{R})$ et $S(\mathbb{R})$ dense dans $L^2$

    D'où $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$ aussi

Donc $\mathcal{F}(L^2) = L^2$ d'où $\mathcal{F}$ est surjective

D'où le résultat □

# COMPLÉMENT

- Si $(h_n)_n$ approximation de l'unité et $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on a $h_n * g \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ on a $g \in \mathcal{C}^0_c \cap \mathcal{L}^1$ d'où est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ d'où $\exists \delta > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|t| = |(x-t)-x| < \delta \Rightarrow |g(x-t) - g(x)| < \varepsilon$

on a $\int_{|t| \geq \delta} h_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\int_{|t| \geq \delta} h_n(t)dt < \varepsilon$.

Soit $n \geq N$. $|h_n * g(x) - g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} h_n(t) g(x-t)dt - g(x) \int_{\mathbb{R}} h_n(t)dt \right|$

$$\leq \int_{|t|<\delta} h_n(t) \underbrace{|g(x-t) - g(t)|}_{\leq \varepsilon} dt + \int_{|t| \geq \delta} h_n(t) \underbrace{|g(x-t) - g(t)|}_{\leq 2\|g\|_\infty} dt$$

$$\leq \varepsilon \underbrace{\int_{\mathbb{R}} h_n(t)dt}_{=1} + 2\|g\|_\infty \underbrace{\int_{|t| \geq \delta} h_n(t)dt}_{\leq \varepsilon}$$

$$\leq \varepsilon(2\|g\|_\infty + 1)$$

D'où $h_n * g \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

- $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ est dense dans $\mathcal{L}^2$

En effet, $\forall f \in \mathcal{L}^2$, $\|f - f\mathbb{1}_{[-n,n]}\|_2^2 = \int_{|x|>n} |f(x)|^2 dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(f\mathbb{1}_{[-n,n]}) \in (\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2)^{\mathbb{N}}$

D'où le résultat.

- Soit $E, F$ esp métriques et $F$ complet, $A \subseteq E$ dense et $f : A \to F$ uniformément continue

Alors $\exists! \tilde{f} : E \to F$ uniformément continue qui prolonge $f$.

En effet, soit $x \in E$ et $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \to x$, $(a_n)_n$ est de Cauchy dans $A$.

$f$ est $UC^0$ d'où $(f(a_n))_n$ est de Cauchy dans $F$ qui est complet

D'où $f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in F$

Soit $(b_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $b_n \to x$, montrons que $f(b_n) \to y$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ de l'uniforme continuité.

D'où $d(f(b_n), y) \leq d(f(b_n), f(a_n)) + d(f(a_n), y) < 2\varepsilon$

Soit $\tilde{f}(x) = y$ et $\forall z \in A$, $\tilde{f}(z) = f(z)$. Mq $\tilde{f}$ est uniformément $C^0$.

Soit $x, y \in E$ tq $d(x, z) < \frac{\eta}{2}$ et $(a_n)_n, (b_n)_n$ tq $a_n \to x$ et $b_n \to z$

$\exists N, \forall n \geq N, d(a_n, b_n) < \eta$

D'où $d(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon$ et $d(f(a_n), f(b_n)) \to d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y))$ d'où $f$ $UC^0$.

- On a bien $S(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$, ou bien "à la main" en calculant $(ix)^k\, \mathcal{F}(f)^{(l)}(x)$
ou bien par bijectivité de $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$, $\forall f \in S(\mathbb{R}), \exists g \in S(\mathbb{R})$ tq $f = \mathcal{F}(g) \in \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$

- $S(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2$.
en effet $\mathcal{C}_c^\infty \subset S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_c^\infty$ est dense dans $L^2$
~~car par~~ $\mathcal{C}_c^0$ dense dans $L^2$ d'où $\forall f \in L^2, \varepsilon > 0, f_1 \in \mathcal{C}_c^0$, $\|f - f_1\|_2 < \varepsilon$
on prend $\overline{f_1}(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ tq $\overline{f_1} \in L^2$ et $\|\rho_n * \overline{f_1} - \overline{f_1}\|_2 \to 0$
et $\mathrm{Supp}(\rho_n * \overline{f_1}) \subset B(0, \frac{1}{n}) + \mathrm{Supp}\, f_1 \subset \Omega$ pour $n$ assez grand
soit $u_n = (\rho_n * \overline{f_1})_{|\Omega}$ pour $n$ assez grand $u_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et $\|u_n - f_1\|_2 \to 0$
d'où $\|u_n - f\|_{L^2} < 2\varepsilon$